Title	マルチフラクタル集合のスピン系表現(ランダムなフラクタル・パターンの成長機構と統計,研究会報告)
Author(s)	本田, 勝也
Citation	物性研究 (1990), 54(1): 10-13
Issue Date	1990-04-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/94008
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

$$U(j)=\begin{cases}-\ln b & \text{for } j=1\\ -\ln a+\ln c+\nu\ln(j-1) & \text{for } j\geqq 2\end{cases}$$

である．ここで，逆温度 q（但し，$-\infty\leqq q\leqq\infty$）を導入して，サイズが n で m 個の粒子を含む系の分配関数を $Z_{n,m}(q)$ とする．ハミルトニアン H には部分列が観測される確率 $p(s_1,\ldots,s_n)$ の情報量 $-\ln p(s_1,\ldots,s_n)$ が対応する．すなわち，サイズ n の系の分配関数は

$$Z_n(q)=\sum_{\{s_i\}}\exp\{-qH(s_1,\ldots,s_n)\} \tag{2}$$

ここで H は前述のハミルトニアンである．そして，次の母関数 Ξ を導入する．

$$\Xi(P,q,\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}e^{-Pn}e^{\mu m}Z_{n,m}(q) \tag{3}$$

系のサイズ n に共役な変数 P は圧力に対応し，粒子数 m に共役な変数 μ はケミカル・ポテンシャルに対応する．

我々は Ξ を関数 $U(j)$ を用いて厳密に書き下し，熱力学的極限における自由エネルギー $f(q)$ と元の力学系の Rênyi の一般化エントロピー（Rênyi (1970)）関係から一般化エントロピーに対する代数方程式を導いた．さらに，この系では（格子気体として考えたとき）$q=1$ で相転移が起こり，$q<1$ が秩序相，$q>1$ が無秩序相である（Sato and Honda (submitted)）．逆温度 q は人為的に導入されたパラメータであるから，この相転移自体が直接観測されるわけではない．にもかかわらず，相転移が存在するということが観測量に大きな影響を及ぼしている．すなわち，物理的な観測量の平均は $q=1$ という点で行なわれ，それがちょうど臨界点に対応していることが本質である．言い換えれば，Intermittency における観測量の大きなゆらぎが一般化エントロピーの相転移の臨界性と等価だということである．これらを考えると，力学系の相転移の性質を調べることは Intermittency のダイナミクスの本質を明らかにすることにつながると言えよう．

参 考 文 献

Halsey, T.C., Jensen, M.H., Kadanoff, L.P., Procaccia, I. and Shraimann, B.I. (1986). Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets, *Phys. Rev. A*, **33**, 1141-1151.

Manneville, P. and Pomeau, Y. (1980). Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems, *Comm. Math. Phys.*, **74**, 189-197.

Rênyi, A. (1970). *Probability Theory*, North-Holland, Amsterdam-New York.

Sato, S. and Honda, K. Statistical physics of intermittency: Phase transitions and fluctuations of scaling indices (submitted for publication).

Takahashi, Y. (1984). Phase transition which exibits $1/\omega$-spectrum: A rigorous result, Proc. US-Japan Workshop held at IPP Nagoya, Research Report IPP Nagoya, 96-104.

マルチフラクタル集合のスピン系表現

名古屋大学工学部　本　田　勝　也

自己相似性という条件下ではあるが，フーリエ解析では捉え切れない複雑な図形を定量的に特徴づけ解析する手段としてフラクタル次元は非常に有効であり，多くの分野で適用されてきた．フラクタル研究は，その後マルチフラクタル次元とセルフ・アファイン図形に発展してき

ているが，ここでは前者について考察する．

1. マルチフラクタル次元の定義とその統計力学

与えられた図形を大きさ l の箱で $N(l)$ 個に分割し，それぞれの箱に確率（測度）$P_i(l)$ $(i=1, 2, \ldots, N(l))$ を割り当てる．この確率としては，図形が点の集合でできている場合には，i 番目の箱内にある点の割合 $P_i(l)=N_i/N$ を採用しても良いし，または物理的に興味ある他の量をもってきても良い．マルチフラクタル次元 D_q は実数 q に対して次式で定義される (Hentschel and Procaccia (1983))．

(1.1) $$D_q=\lim_{l\to 0}(q-1)^{-1}\ln Z_l(q)/\ln l,$$

(1.2) $$Z_l(q)=\sum_i [P_i(l)]^q.$$

この定義より，$q=0$ の場合は集合の台（support）のフラクタル次元，$q=1$ の場合は情報次元を与えることが理解される．このようにマルチフラクタル次元は，これまで種々に定義されてきたフラクタル的次元を含んでおり，単なる一つの量にすぎないフラクタル次元を q の関数として拡張したものである．また，図形における確率を，一様であると近似して，$P_i(l)=1/N(l)$ とおけば，D_q は q に依存しない定数（＝台のフラクタル次元）になる．したがって，単なるフラクタル次元では図形における非一様性を無視することになり，より詳細な情報を図形から抽出するためにはマルチフラクタル次元を考察する必要がある．

さて，Halsey et al. (1986) はより実体論的な singular スペクトラムを導入した．i 番目の箱の確率が指数則 $P_i(l)\sim l^{\alpha_i}$ にしたがい，α_i が α と $\alpha+d\alpha$ にあるような箱の数が $\rho(\alpha)l^{-f(\alpha)}d\alpha$ と表されると仮定する．$f(\alpha)$ は singularity α をもつ部分集合のフラクタル次元である．分配関数 (1.2) 式は α の積分に置き直して

(1.3) $$Z_l(q)=\int d\alpha\,\rho(\alpha)\,l^{q\alpha-f(\alpha)}$$

となるが，これはさらに鞍部点法を用いて

(1.4) $$Z_l(q)\sim l^{q\alpha(q)-f(\alpha(q))}$$

と評価される．ここで $\alpha(q)$ は

(1.5) $$df(\alpha)/d\alpha\,|_{\alpha=\alpha(q)}=q$$

で与えられる．(1.1), (1.4) 式から $\tau(q)=(q-1)D_q$ で定義される $\tau(q)$ は

(1.6) $$\tau(q)=q\alpha(q)-f(\alpha(q))$$

として導かれる．$\tau(q)$ をルジャンドル変換して $f(\alpha)$ は

(1.7) $$\alpha(q)=d\tau(q)/dq,$$

(1.8) $$f(q)=q\alpha(q)-\tau(q)$$

と，パラメター q を介して表される．

さて，上記の定式は図形の分割を旨く考え直すと統計力学の形式と同一になることが知られている（本田・松下 (1988)）．簡単のため 1 次元的に配列した図形を考える．図形の中央で半分に分け，左半分に $s=-1$ を，右半分に $s=+1$ を割り当てる．さらにそれぞれの部分を半分割して左から順に $\{-1, -1\}$, $\{-1, +1\}$, $\{+1, -1\}$, $\{+1, +1\}$ とする．このような分割を n 回

続けると，大きさ $l=(1/2)^n$ に細分割された各々の部分に n 個の＋1と－1とからなる数列 $\{s_1, s_2,\ldots, s_n\}$ が割り当てられる．したがって，i 番目の箱に付随した確率 $P_i(l)$ は $P(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ と表される．もし，情報量を用いてハミルトニアンを

(1.9) $$\mathscr{H}(\{s_i\})=-\ln P(s_1, s_2,\ldots, s_n)$$

と定義すると，分配関数 $Z_l(q)$ は

(1.10) $$Z_n(q)=\sum_{\{s_i\}}\exp[-q\mathscr{H}(\{s_i\})]$$

と表され，統計力学におけるそれと同一の形式になる．逆温度に相当する q は $-\infty\leqq q\leqq\infty$ であることに注意する．$f(\alpha)$ スペクトラムの導出過程から次の熱力学との対応関係は自明といえよう：α ↔ エネルギー；f ↔ エントロピー；τ ↔ 自由エネルギー．

2. スピン系による考察

(1.10)式は，1次元イジングスピン系の分配関数と同じ形式であることに注目して，逆に適当にハミルトニアンを設定し，それが生成する図形を議論する．このことによって，図形を解析する一般的な方法を確立することが目的である．第1節で述べたように，図形の各部分にスピン配位を割り当て，確率

(2.1) $$P(s_1, s_2,\ldots, s_n)=\exp[-\mathscr{H}(\{s_i\})]/\sum_{\{s_i\}}\exp[-\mathscr{H}(\{s_i\})]$$

に比例する点をその領域内に分布して図形を作成する．

2.1 最近接スピン間の相互作用

1次元イジングスピン系の典型例

(2.2) $$\mathscr{H}(\{s_i\})=-J\sum_i s_is_{i+1}-H\sum_i s_i$$

から生成される図形に対する分配関数は統計力学の簡単な演習問題で求められる．注意されることは，この体系にはエネルギーと磁化 m に相当する2つの示量変数が存在することである．したがって，$f(\alpha)$ スペクトラムは α と m の2変数関数 $f(\alpha, m)$ になり，以前に議論した hidden singularities（本田・松下（1988））がこの図形にも存在することになる．第1節での図形解析の言葉で表せば，(2.2)式で表現される図形は分割の過程に"記憶"効果があるためマルコフ分割ができず，確率は

(2.3) $$P(s_1, s_2,\ldots, s_n)=\prod_i P_1(s_i)\prod_i P_2(s_i, s_{i+1})$$

の形になり，P_1 と P_2 それぞれに独立な singularity が存在しうる．分配関数(1.10)式は

(2.4) $$Z_n(q, \eta)\propto\sum_{\{s_i\}}\exp[q\{J\sum_i s_is_{i+1}+\eta H\sum_i s_i\}]$$

と拡張される．

2.2 図形の相転移

伏見・テンパリー模型は1次元でも相転移を示す．そのハミルトニアンは

(2.5) $$\mathscr{H}(\{s_i\})=-(J/n)\sum_{\substack{i\\(i\neq j)}}\sum_j s_is_j$$

で与えられ，$q=1/J$ で2次の古典的相転移をする．図形の相転移現象は奇異な感じを与えるかもしれないが，今後の発展によっては有用な概念になると期待される．

2.3 ランダムな図形

自然界に存在する図形にはなんらかのランダムさが含まれている．その解析には，(2.2)式における J や H などがある分布 $P(J)$, $P(H)$ にしたがった値をとるとして，自由エネルギーなどの物理量を平均する操作をすればよいことがわかる．すなわち，《…》を $P(J)$, $P(H)$ による平均として

$$\tau(q,\ \eta)=-\lim_{n\to\infty}\langle\!\langle n^{-1}\ln Z_n(q,\ \eta)\rangle\!\rangle \tag{2.6}$$

とすればよい．

2.4 空隙のある図形

これまでの例において台のフラクタル次元は，いずれも空間の次元に一致していた．すなわち，確率が0である領域は存在しなかった．しかし，重みつきカントール集合の場合は $D_0=\log 2/\log 3$ であり，$D_0\neq 1$ である．このような空隙は「禁じられた配位空間」に相当する．例えば，体系に保存量があれば保存則を満足しないスピン配位は実現されない．この場合は，ミクロカノニカルアンサンブル（エネルギー一定）とカノニカルアンサンブル（エネルギーに共役な温度が一定）の間に成立するルジャンドル変換と同様な手法が役立つはずである．

2.5 高次元図形の解析

議論を簡単にするために1次元図形に限ってきたが，高次元図形への拡張も容易にできる．高次元図形を分割するときに，各部分は高自由度 $(s_{ix},\ s_{iy},\ldots)$ のスピン系の配位に対応させることができる．したがって，高次元図形は高自由度の1次元古典スピン系で置き代えられ，その分配関数も容易に計算できる．

3. まとめ

マルチフラクタル図形の解析に統計力学的な手法が使用できることを説明した．スピン系のハミルトニアンで与えられる図形を例題にすることによって様々な概念を導入した．例えば，図形の相転移，保存量などは現在では荒唐無稽に考えられるかも知れないが，今後の発展次第では興味あるキーワードになることが期待される．

参考文献

Halsey, T.C., Jensen, M.H., Kadanoff, L.P., Procaccia, I. and Shraiman, B.I. (1986). Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets, *Phys. Rev. A*, **33**, 1141-1151.

Hentschel, H.G.E. and Procaccia, I. (1983). The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors, *Physica*, 8D, 435-444.

本田勝也，松下　貢（1988）．マルチフラクタル集合における f-α 定式の一般化，物性研究，**50**，332-337.